

Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung freier und erzwungener Schwingungen von Stabwerken

Pestel, Eduard

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 6, 1954,
S. 227-242



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung freier und erzwungener Schwingungen von Stabwerken

Von Eduard Pestel

Mit 11 Abbildungen

Vorgelegt von Herrn O. Flachsbart

Summary: The well-known Holzer-method for the calculation of torsional vibrations of crankshafts has been extended to the investigation of the general case of vibrations of frame works, shafts etc. Two different matrix-solutions are described, which can readily be applied to the study of stationary vibrations (free or forced) of complex structures.

1. Einleitung

Die Forderung der Praxis nach einer zuverlässigen quantitativen Vorausbestimmung des Schwingungsverhaltens komplizierter Tragwerke und Maschinenaggregate hat zur Entwicklung zahlreicher Näherungsverfahren geführt, die sich im Hinblick auf das der Rechnung zugrunde gelegte Ersatzsystem in zwei Hauptgruppen einteilen lassen:

- a) Rayleigh-Ritz-Verfahren in der Form von Galerkin, Grammel u. a. und Methoden der sukzessiven Approximation (z. B. Stodola-Verfahren) bei Verwendung eines Ersatzsystems mit kontinuierlicher Massenbelegung.
- b) Anwendung „klassischer Verfahren“ für die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen nach Aufstellung eines Ersatzsystems mit diskreter Massenbelegung.

Die unter a) genannten Verfahren, insbesondere die einfache Rayleigh-Methode und das zeichnerische Stodola-Verfahren, haben sich für die Bestimmung der Grundschwingung bei der Untersuchung von Biegeschwingungen seit mehr als 30 Jahren in ihrer praktischen Anwendung gut bewährt. Bei der Ermittlung der Oberschwingungen sind die mit diesen Verfahren erzielten Ergebnisse unsicher, wenn nicht ein erheblicher, im allgemeinen schwer schematisierbarer Rechenaufwand getrieben wird und das Ersatzsystem die Formulierung der mathematischen Aufgabe in selbstadjungierter Form erlaubt. Der Praktiker hat daher besonders in den letzten 10 Jahren nach anderen Wegen gesucht.

Während nun, grundsätzlich gesehen, bei den Verfahren unter a) der Grad der Näherung in der Vielgliedrigkeit des Ansatzes seinen Ausdruck findet, wird bei der Schwingungsrechnung nach b) der Grad der Annäherung bei der Aufstellung des Ersatzsystemes festgelegt. Die Erfahrung hat dabei gezeigt, daß — sofern überhaupt die Rückführung auf ein einfaches oder vermaschtes Masse-Federsystem möglich ist — eine vernünftige Aufteilung der kontinuierlichen Massenbelegung in etwa 2mal so viele diskrete Massen, wie Eigenfrequenzen von der Grundschwingung an aufwärts gesucht werden, im allgemeinen praktisch brauchbare Ergebnisse liefert.

Bei Ersatzsystemen, die mit vielen Massen (Anzahl der Massen etwa ≥ 4) belegt sind, hat man nun für die Bewältigung der mathematischen Aufgabe im wesentlichen zwei verschiedene Wege eingeschlagen.

- I. Berechnung der Federeinflußzahlen des Systems unter Beachtung der Randbedingungen und Aufstellung der Eigenwertdeterminante, zu deren Lösung zahlreiche Verfahren (z. B. Hessenberg-Methode) zur Verfügung stehen.
- II. Vorgabe jeweils eines geschätzten Eigenwertes und Untersuchung, ob mit dem gewählten Zahlenwert die Randbedingungen bei endlicher Stabwerksauslenkung erfüllt werden können.

Während die unter I. zusammengefaßten Verfahren in der Hauptsache zur Berechnung von Biegeschwingungen bzw. gekoppelte Biege- und Torsionschwingungen benutzt wurden, hatten sich für die Behandlung reiner Torsionschwingungen die rechnerischen und zeichnerischen Verfahren entsprechend II.*) (Holzer-Tolle, Kutzbach, Baranoff u. a.) seit langem in der Praxis durchgesetzt.

Auch das in dieser Arbeit mitgeteilte Verfahren benutzt den unter II. genannten Gesichtspunkt und erweitert damit die für ungekoppelte Biegeschwingungen bekanntgewordenen Verfahren dieser Art von Myklestad [3] und Thomson [4] auf allgemeine Stabwerke mit diskreter**) Massen- und Massenträgheitsmomentenbelegung***).

2. Grundgedanke des Verfahrens

Gegeben sei ein räumlicher Stabzug mit diskreter Massenbelegung (vgl. Abb. 1). Die Massen 1, 2, ... n mögen auch in bezug auf drei zueinander senkrechte Achsen von Null verschiedene Trägheitsmomente besitzen. Dabei braucht der Schwerpunkt der Massen nicht auf der elastischen Achse der Federstäbe zu liegen. Die Massen sind verbunden durch masselose Federn, die Längs- und Querkkräfte sowie Biege- und Torsionsmomente übertragen können.

Wir geben nun am linken Ende des Stabzuges unmittelbar rechts von der Masse 1 sechs harmonisch mit der Zeit veränderliche Verschiebungsgrößen (drei translatorische und drei rotatorische Auslenkungen) und sechs ebenso zeitlich veränderliche Schnittgrößen (eine Längskraft, zwei Querkkräfte, zwei Biegemomente und ein Torsionsmoment) vor. Außerdem wählen wir eine

*) Erst kürzlich bekanntgewordene Arbeiten von Schaefer [1] und Falk [2] haben das Verfahren von Baranoff-Kutzbach durch Anwendung des Matrizenkalküls in seiner Ergiebigkeit und seinem Anwendungsbereich (offene, geschlossene, mehrfache und verzweigte Ketten) erheblich erweitert.

**) Ohne grundsätzliche Schwierigkeiten läßt sich das Verfahren auch auf Ersatzsysteme mit kontinuierlicher Massenbelegung anwenden; doch wird hier von einer Erörterung dieser Möglichkeit abgesehen, da der Verfasser glaubt, daß für die praktische Anwendung die Aufstellung eines Ersatzsystems mit diskreter Massenbelegung erhebliche Rechenvorteile bietet.

***). Unabhängig vom Verfasser hat H. Fuhrke [5] in seiner Dissertation (Darmstadt 1953, Ref. Prof. Marguerre), mit der der Verfasser vor einigen Wochen durch einen Vortrag bekanntgemacht wurde, in ähnlicher Weise ein allgemeines Verfahren für die Untersuchung des Schwingungsverhaltens von Stabwerken entwickelt. Das Verfahren des Verfassers wurde bereits im vergangenen Jahr mehrfach zur Berechnung der Eigenschwingungen von Stahlfundamenten für Dampfturbinen mit Erfolg verwendet.

Frequenz aus dem Frequenzbereich, für den uns das Schwingungsverhalten des Stabzuges interessiert. Unter der Voraussetzung, daß die elastischen Eigenschaften des masselosen Federstabes 1 bekannt sind, ist die relative Auslenkung des Punktes 1 gegenüber dem Punkt 2 eindeutig festgelegt. Diese relative Auslenkung ist nichts weiter als die Auslenkung des Punktes 1 unter der Wirkung der bei 1 angreifenden Schnittkräfte und Schnittmomente,

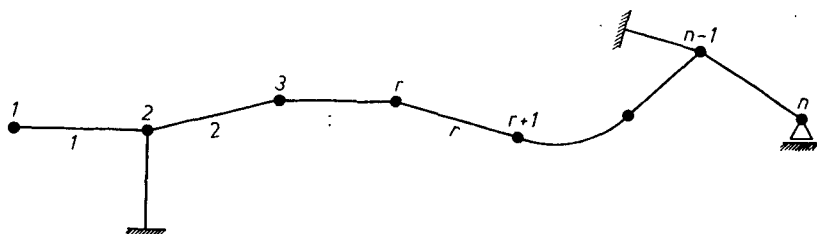


Abb. 1. Mit Einzelmassen belegter Stabzug

wenn der Stab an der Stelle 2 fest eingespannt ist. Da nun die absolute Auslenkung des Punktes 1 vorgegeben ist, ergibt sich die absolute Auslenkung der Stelle 2, indem die Komponenten der relativen Auslenkung von 1 gegenüber 2 von den entsprechenden Komponenten der absoluten Auslenkung des Punktes 1 abgezogen werden.

Im Hinblick auf die Tatsache, daß die Feder zwischen 1 und 2 als masselos angenommen wird, ist die Veränderung der bei 1 vorgegebenen Schnittgrößen bis zum Schnitt unmittelbar rechts von der Masse 2 eindeutig durch die Eigenschaften der Masse und der Federfesselung an der Stelle 2 bestimmt, da ja dort die absoluten Auslenkungen und damit auch die absoluten Beschleunigungen bereits ermittelt sind.

Mit den neuen Schnittgrößen rechts von der Masse 2 läßt sich nun die relative Auslenkung des Punktes 2 gegenüber 3 unter Berücksichtigung der Federeigenschaften zwischen 2 und 3 wie zuvor berechnen. Damit ist auch die absolute Auslenkung der Stelle 3 bekannt. Die Fortsetzung des Verfahrens vollzieht sich nun in der bereits beschriebenen Weise. So gelangen wir schließlich zum Punkt n und erhalten dort sechs Komponenten der Auslenkung und sechs Schnittgrößen. Diese zwölf Größen ergeben sich als Linearkombinationen der bei 1 vorgegebenen sechs Auslenkungs- und sechs Schnittgrößen.

An jedem Ende eines räumlich beanspruchten Stabzuges sind im allgemeinen sechs homogene Randbedingungen gegeben. Im Falle des Stabzuges der Abb. 1 sind an der Stelle 1 alle „Schnittgrößen“ bekannt, sobald die sechs Verschiebungsgrößen dort vorgegeben sind.

Am Punkte n hingegen verlangen die Randbedingungen, daß eine Auslenungskomponente und fünf Schnittgrößen verschwinden müssen. Wir haben hier also infolge der zu erfüllenden Randbedingungen ein homogenes Gleichgewichtssystem mit sechs Unbekannten, nämlich den an der Stelle 1 vorgegebenen Auslenkungsgrößen, die nur dann von Null verschieden sein können, wenn die Nennerdeterminante dieses Gleichungssystems verschwindet.

Der Wert der Nennerdeterminante ist aber eine Funktion der eingangs der Rechnung gewählten Frequenz. Nur wenn zufällig eine Eigenfrequenz in die Rechnung eingeführt wird, ergibt sich die Nennerdeterminante zu Null. Man berechnet nun in dem interessierenden Frequenzbereich die Nennerdeterminante für einige Frequenzen und findet dann durch Interpolation die gesuchten Nulldurchgänge (vgl. Abb. 2).

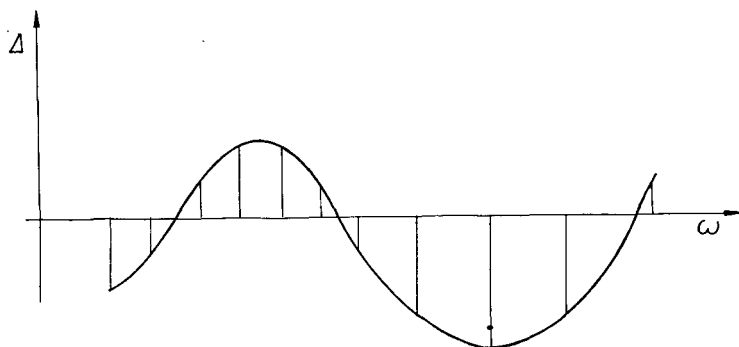


Abb. 2. Frequenzdeterminante als Funktion von ω (schematisch)

3. Aufstellung der Übertragungsmatrizen

Die Übertragung der sechs Auslenkungsgrößen und sechs Schnittgrößen von einer Stelle r zum folgenden Punkt $r + 1$ läßt sich in übersichtlicher Weise als Produkt einer Spaltenmatrix mit einer quadratischen Matrix darstellen. Die Elemente der quadratischen Matrix wollen wir als die Übertragungszahlen des Abschnittes r bezeichnen. Diese errechnen sich mit Hilfe der Relativauslenkungen der Stelle r gegenüber der Stelle $r + 1$ unter der Wirkung von Einheitsschnittgrößen an der Stelle r und ferner aus den Zahlen, welche die Schnittgrößen von der Stelle unmittelbar rechts von r nach unmittelbar rechts von $r + 1$ unter Berücksichtigung der Eigenschaften der Masse $r + 1$ und gegebenenfalls der Federfesselung dieser Masse übertragen. Nach dem Vorausgesagten werden die Relativauslenkungen gefunden, indem man die Auslenkung des freien Endes eines eingespannten Stabes von den geometrischen und elastischen Eigenschaften des Abschnittes r unter der Einwirkung von Einheitsschnittgrößen berechnet, die am freien Ende als äußere Kräfte bzw. Momente angreifend angenommen werden.

Im folgenden gelten der Anschaulichkeit halber zunächst die Bezeichnungen der Abb. 3 und 3a. Ferner bezeichnen die Größen $v_{M1,r} \dots$ und $v_{S1,r} \dots$ bzw. $d_{M1,r} \dots$ und $d_{S1,r} \dots$ die Relativdrehung bzw. -auslenkung der Stelle r gegenüber $r + 1$ unter der Wirkung der im ersten Index gekennzeichneten Schnittgrößen. Wenn weiterhin $\Theta_{1,r+1} \dots$, m_{r+1} und $e_{1,r+1} \dots$ in der genannten Reihenfolge die Schwerpunktsmassenträgheitsmomente, die Masse und die Exzentrizitäten des Massenschwerpunktes der Masse $r + 1$ *)

*) Die Masse r liegt links vom Schnitt an der Stelle r und somit außerhalb des betrachteten Abschnitts r .

sowie l_r die Länge des Abschnittes r bezeichnen und ferner der Einfachheit halber die Berechnung der Übertragungsmatrix hier auf gerade Stäbe beschränkt wird, lassen sich die sechs Auslenkungs- und sechs Schnittgrößen an der Stelle $r + 1$ wie folgt aus den entsprechenden bei r darstellen.

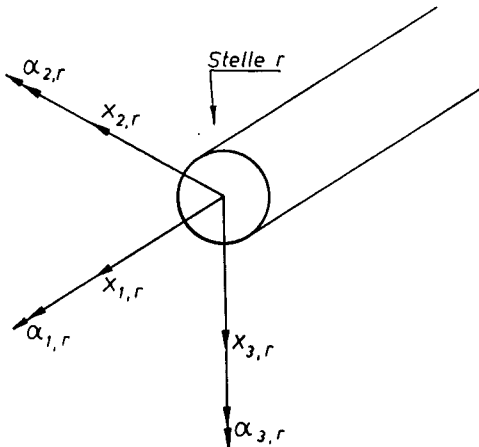


Abb. 3. Auslenkungsgrößen

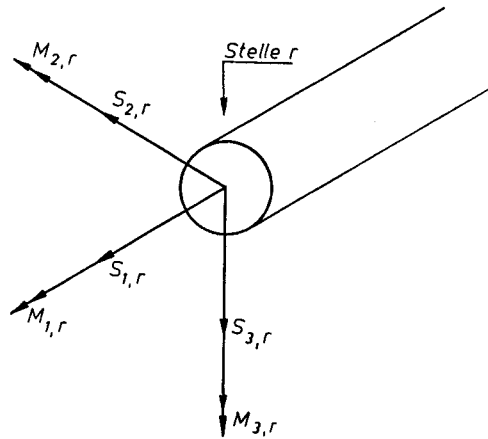


Abb. 3a. Schnittgrößen

$$\begin{aligned}
 \alpha_{1,r+1} &= \alpha_{1,r} - v_{M1,r} \cdot M_{1,r}; & \alpha_{2,r+1} &= \alpha_{2,r} - v_{M2,r} \cdot M_{2,r} + v_{S3,r} \cdot S_{3,r}; \\
 \alpha_{3,r+1} &= \alpha_{3,r} - v_{M3,r} \cdot M_{3,r} - v_{S2,r} \cdot S_{2,r}; \\
 x_{1,r+1} &= x_{1,r} - d_{S1,r} \cdot S_{1,r}; \\
 x_{2,r+1} &= x_{2,r} - l_r \cdot \alpha_{3,r+1} - d_{M3,r} \cdot M_{3,r} + d_{S2,r} \cdot S_{2,r}; \\
 x_{3,r+1} &= x_{3,r} + l_r \cdot \alpha_{2,r+1} + d_{M2,r} \cdot M_{2,r} - d_{S3,r} \cdot S_{3,r}; \\
 M_{1,r+1} &= [\Theta_{1,r+1} + m_{r+1} (e_{2,r+1}^2 + e_{3,r+1}^2)] \omega^2 \alpha_{1,r+1} - \\
 &\quad - m_{r+1} \cdot e_{1,r+1} \cdot e_{2,r+1} \cdot \omega^2 \cdot \alpha_{2,r+1} - \\
 &\quad - m_{r+1} \cdot e_{1,r+1} \cdot e_{3,r+1} \omega^2 \cdot \alpha_{3,r+1} - m_{r+1} \cdot e_{3,r+1} \omega^2 \cdot x_{2,r+1} + \\
 &\quad + m_{r+1} e_{2,r+1} \cdot \omega^2 \cdot x_{3,r+1} + M_{1,r}; \\
 M_{2,r+1} &= -m_{r+1} \cdot e_{2,r+1} \cdot e_{1,r+1} \cdot \omega^2 \cdot \alpha_{1,r+1} + [\Theta_{2,r+1} + \\
 &\quad + m_{r+1} (e_{3,r+1}^2 + e_{1,r+1}^2)] \omega^2 \cdot \alpha_{2,r+1} - m_{r+1} e_{2,r+1} e_{3,r+1} \cdot \omega^2 \cdot \alpha_{3,r+1} + \\
 &\quad + m_{r+1} \cdot e_{3,r+1} \omega^2 \cdot x_{1,r+1} - m_{r+1} \cdot e_{1,r+1} \cdot \omega^2 \cdot x_{3,r+1} + \\
 &\quad + M_{2,r} - l_r \cdot S_{3,r}; \\
 M_{3,r+1} &= -m_{r+1} e_{3,r+1} \cdot e_{1,r+1} \omega^2 \cdot \alpha_{1,r+1} - m_{r+1} \cdot e_{3,r+1} \cdot e_{2,r+1} \cdot \omega^2 \cdot \alpha_{2,r+1} + \\
 &\quad + [\Theta_{3,r+1} + m_{r+1} (e_{1,r+1}^2 + e_{2,r+1}^2)] \omega^2 \cdot \alpha_{3,r+1} - \\
 &\quad - m_{r+1} e_{2,r+1} \omega^2 \cdot x_{1,r+1} + m_{r+1} \cdot e_{1,r+1} \omega^2 \cdot x_{2,r+1} + M_{3,r} + l_r \cdot S_{2,r}; \\
 S_{1,r+1} &= m_{r+1} e_{3,r+1} \omega^2 \cdot \alpha_{2,r+1} - m_{r+1} e_{2,r+1} \cdot \omega^2 \cdot \alpha_{3,r+1} + \\
 &\quad + m_{r+1} \cdot \omega^2 \cdot x_{1,r+1} + S_{1,r}; \\
 S_{2,r+1} &= -m_{r+1} e_{3,r+1} \omega^2 \cdot \alpha_{1,r+1} + m_{r+1} e_{1,r+1} \cdot \omega^2 \cdot \alpha_{3,r+1} + \\
 &\quad + m_{r+1} \cdot \omega^2 \cdot x_{2,r+1} + S_{2,r}; \\
 S_{3,r+1} &= m_{r+1} \cdot e_{2,r+1} \cdot \omega^2 \cdot \alpha_{1,r+1} - m_{r+1} e_{1,r+1} \cdot \omega^2 \cdot \alpha_{2,r+1} + \\
 &\quad + m_{r+1} \omega^2 \cdot x_{3,r+1} + S_{3,r}.
 \end{aligned}$$

Die rechte Seite des Gleichungssystems läßt sich als Produkt einer quadratischen Matrix und einer Spaltenmatrix schreiben, wenn die auf der rechten Seite noch mit dem Index $r + 1$ behafteten Größen mit Hilfe der bekannten Größen mit dem Index r eliminiert werden. Die quadratische Matrix ist dabei entsprechend der Abb. 4 besetzt. Die von Null verschiedenen Elemente der Matrix a_{ik} lassen sich wie folgt aus den gegebenen Daten des Abschnittes r und der gewählten Frequenz ω berechnen.

$$\begin{aligned}
 a_{11,r} &= 1; \quad a_{17,r} = -v_{M1,r} \\
 a_{22,r} &= 1; \quad a_{28,r} = -v_{M2,r}; \quad a_{212,r} = v_{S3,r} \\
 a_{33,r} &= 1; \quad a_{39,r} = -v_{M3,r}; \quad a_{311,r} = -v_{S2,r} \\
 a_{44,r} &= 1; \quad a_{410,r} = -d_{S1,r} \\
 a_{53,r} &= -l_r; \quad a_{55,r} = 1; \quad a_{59,r} = l_r \cdot v_{M3,r} - d_{M3,r}; \quad a_{511,r} = l_r v_{S2,r} - d_{S2,r} \\
 a_{62,r} &= l_r; \quad a_{66,r} = 1; \quad a_{68,r} = -l_r v_{M2,r} + d_{M2,r}; \quad a_{612,r} = l_r v_{S3,r} - d_{S3,r} \\
 a_{71,r} &= [\Theta_{1,r+1} + m_{r+1} (e_{2,r+1}^2 + e_{3,r+1}^2)] \omega^2; \\
 a_{72,r} &= -m_{r+1} \omega^2 \cdot e_{2,r+1} (e_{1,r+1} - l_r); \\
 a_{73,r} &= m_{r+1} \cdot \omega^2 \cdot e_{3,r+1} (l_r - e_{1,r+1}); \\
 a_{75,r} &= -m_{r+1} \cdot \omega^2 \cdot e_{3,r+1}; \quad a_{76,r} = m_{r+1} \cdot \omega^2 \cdot e_{2,r+1}; \\
 a_{77,r} &= -[\Theta_{1,r+1} + m_{r+1} (e_{2,r+1}^2 + e_{3,r+1}^2)] \omega^2 \cdot v_{M1,r} + 1; \\
 a_{78,r} &= m_{r+1} \cdot \omega^2 \{e_{2,r+1} [(e_{1,r+1} - l_r) v_{M2,r} + d_{M2,r}]\}; \\
 a_{79,r} &= -m_{r+1} \omega^2 \{e_{3,r+1} [(l_r - e_{1,r+1}) v_{M3,r} - d_{M3,r}]\}; \\
 a_{711,r} &= -m_{r+1} \cdot \omega^2 \{e_{3,r+1} [(l_r - e_{1,r+1}) v_{S2,r} - d_{S2,r}]\}; \\
 a_{712,r} &= -m_{r+1} \cdot \omega^2 \{e_{2,r+1} [(e_{1,r+1} - l_r) v_{S3,r} + d_{S3,r}]\}; \\
 a_{81,r} &= -m_{r+1} \cdot \omega^2 e_{1,r+1} \cdot e_{2,r+1}; \\
 a_{82,r} &= \{[\Theta_{2,r+1} + m_{r+1} (e_{3,r+1}^2 + e_{1,r+1}^2)] - m_{r+1} e_{1,r+1} \cdot l_r\} \omega^2; \\
 a_{83,r} &= -m_{r+1} \cdot \omega^2 e_{2,r+1} \cdot e_{3,r+1}; \\
 a_{84,r} &= m_{r+1} \cdot \omega^2 e_{3,r+1}; \quad a_{86,r} = -m_{r+1} \cdot \omega^2 \cdot e_{1,r+1}; \\
 a_{87,r} &= m_{r+1} \cdot \omega^2 e_{1,r+1} e_{2,r+1} \cdot v_{M1,r}; \\
 a_{88,r} &= -\{[\Theta_{2,r+1} + m_{r+1} (e_{3,r+1}^2 + e_{1,r+1}^2)] - m_{r+1} e_{1,r+1} l_r\} \omega^2 \cdot v_{M2,r} \\
 &\quad - m_{r+1} \cdot \omega^2 e_{1,r+1} \cdot d_{M2,r} + 1; \\
 a_{89,r} &= m_{r+1} \cdot \omega^2 e_{2,r+1} \cdot e_{3,r+1} \cdot v_{M3,r}; \quad a_{810,r} = -m_{r+1} \cdot \omega^2 e_{3,r+1} d_{S1,r}; \\
 a_{811,r} &= m_{r+1} \omega^2 \cdot e_{2,r+1} \cdot e_{3,r+1} \cdot v_{S2,r}; \\
 a_{812,r} &= \{[\Theta_{2,r+1} + m_{r+1} (e_{3,r+1}^2 + e_{1,r+1}^2)] - m_{r+1} e_{1,r+1} l_r\} \omega^2 \cdot v_{S3,r} + \\
 &\quad + m_{r+1} \cdot \omega^2 e_{1,r+1} \cdot d_{S3,r} - l_r \cdot \\
 a_{91,r} &= -m_{r+1} \cdot \omega^2 e_{1,r+1} \cdot e_{3,r+1}; \quad a_{92,r} = -m_{r+1} \omega^2 \cdot e_{2,r+1} e_{3,r+1}; \\
 a_{93,r} &= \{[\Theta_{3,r+1} + m_{r+1} (e_{1,r+1}^2 + e_{2,r+1}^2)] - m_{r+1} \cdot e_{1,r+1} l_r\} \omega^2; \\
 a_{94,r} &= -m_{r+1} \omega^2 e_{2,r+1}; \quad a_{95,r} = m_{r+1} \omega^2 e_{1,r+1}; \\
 a_{97,r} &= m_{r+1} \omega^2 \cdot e_{1,r+1} e_{3,r+1} v_{M1,r}; \\
 a_{98,r} &= m_{r+1} \omega^2 e_{2,r+1} e_{3,r+1} v_{M2,r}; \\
 a_{99,r} &= -\{[\Theta_{3,r+1} + m_{r+1} (e_{1,r+1}^2 + e_{2,r+1}^2)] - m_{r+1} e_{1,r+1} l_r\} \omega^2 \cdot v_{M3,r} - \\
 &\quad - m_{r+1} \omega^2 e_{1,r+1} d_{M3,r} + 1; \\
 a_{910,r} &= m_{r+1} \omega^2 e_{2,r+1} d_{S1,r};
 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}
 a_{11,r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{17,r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & a_{12,r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{28,r} & 0 & 0 & 0 & a_{212,r} \\
 0 & 0 & a_{33,r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{39,r} & 0 & a_{311,r} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & a_{44,r} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{410,r} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & a_{53,r} & 0 & a_{55,r} & 0 & 0 & 0 & a_{59,r} & 0 & a_{511,r} & 0 \\
 0 & a_{62,r} & 0 & 0 & 0 & a_{66,r} & 0 & a_{68,r} & 0 & 0 & 0 & a_{612,r} \\
 a_{71,r} & a_{72,r} & a_{73,r} & 0 & a_{75,r} & a_{76,r} & a_{77,r} & a_{78,r} & a_{79,r} & 0 & a_{711,r} & a_{712,r} \\
 a_{81,r} & a_{82,r} & a_{83,r} & a_{84,r} & 0 & a_{86,r} & a_{87,r} & a_{88,r} & a_{89,r} & a_{810,r} & a_{811,r} & a_{812,r} \\
 a_{91,r} & a_{92,r} & a_{93,r} & a_{94,r} & a_{95,r} & 0 & a_{97,r} & a_{98,r} & a_{99,r} & a_{910,r} & a_{911,r} & a_{912,r} \\
 0 & a_{102,r} & a_{103,r} & a_{104,r} & 0 & 0 & 0 & a_{108,r} & a_{109,r} & a_{1010,r} & a_{1011,r} & a_{1012,r} \\
 a_{111,r} & 0 & a_{113,r} & 0 & a_{115,r} & 0 & a_{117,r} & 0 & a_{119,r} & 0 & a_{1111,r} & 0 \\
 a_{121,r} & a_{122,r} & 0 & 0 & 0 & a_{126,r} & a_{127,r} & a_{128,r} & 0 & 0 & 0 & a_{1212,r}
 \end{pmatrix}
 \times
 \begin{pmatrix}
 u_{1,r} \\
 u_{2,r} \\
 u_{3,r} \\
 u_{4,r} \\
 u_{5,r} \\
 u_{6,r} \\
 u_{7,r} \\
 u_{8,r} \\
 u_{9,r} \\
 u_{10,r} \\
 u_{11,r} \\
 u_{12,r}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 u_{1,r+1} \\
 u_{2,r+1} \\
 u_{3,r+1} \\
 u_{4,r+1} \\
 u_{5,r+1} \\
 u_{6,r+1} \\
 u_{7,r+1} \\
 u_{8,r+1} \\
 u_{9,r+1} \\
 u_{10,r+1} \\
 u_{11,r+1} \\
 u_{12,r+1}
 \end{pmatrix}$$

$$\text{oder } \mathcal{U}_r \cdot \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_{r+1}$$

Abb. 4. Matrizenprodukt

Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung usw.

$$a_{911,r} = -\{\Theta_{3,r+1} + m_{r+1}(e_{1,r+1}^2 + e_{2,r+1}^2)\} \omega^2 \cdot v_{S2,r} - m_{r+1} \cdot e_{1,r+1} l_r - m_{r+1} \omega^2 \cdot e_{1,r+1} d_{S2,r} + l_r;$$

$$a_{912,r} = -m_{r+1} \omega^2 e_{2,r+1} e_{3,r+1} v_{S3,r}.$$

$$a_{102,r} = m_{r+1} \cdot \omega^2 e_{3,r+1}; \quad a_{103,r} = -m_{r+1} \omega^2 \cdot e_{2,r+1}; \quad a_{104,r} = m_{r+1} \cdot \omega^2;$$

$$a_{108,r} = -m_{r+1} \omega^2 e_{3,r+1} \cdot v_{M2,r}; \quad a_{109,r} = m_{r+1} \omega^2 e_{2,r+1} v_{M3,r};$$

$$a_{1010,r} = -m_{r+1} \omega^2 d_{S1,r} + 1;$$

$$a_{1011,r} = m_{r+1} \omega^2 e_{2,r+1} v_{S2,r}; \quad a_{1012,r} = m_{r+1} \omega^2 e_{3,r+1} v_{S3,r}.$$

$$a_{111,r} = -m_{r+1} \omega^2 e_{3,r+1}; \quad a_{113,r} = m_{r+1} \omega^2 (e_{1,r+1} - l_r); \quad a_{115,r} = m_{r+1} \omega^2;$$

$$a_{117,r} = m_{r+1} \omega^2 e_{3,r+1} v_{M1,r}; \quad a_{119,r} = m_{r+1} \omega^2 [(l_r - e_{1,r+1}) v_{M3,r} - d_{M3,r}];$$

$$a_{1111,r} = m_{r+1} \omega^2 [(l_r - e_{1,r+1}) v_{S2,r} - d_{S2,r}] + 1.$$

$$a_{121,r} = m_{r+1} \omega^2 e_{2,r+1}; \quad a_{122,r} = m_{r+1} \omega^2 (l_r - e_{1,r+1}); \quad a_{126,r} = m_{r+1} \omega^2;$$

$$a_{127,r} = -m_{r+1} \omega^2 \cdot e_{2,r+1} v_{M1,r}; \quad a_{128,r} = m_{r+1} \omega^2 [(e_{1,r+1} - l_r) v_{M2,r} + d_{M2,r}];$$

$$a_{1212,r} = m_{r+1} \omega^2 [(l_r - e_{1,r+1}) v_{S3,r} - d_{S3,r}] + 1.$$

Um die Schreibweise übersichtlicher zu gestalten, werden im folgenden die Bezeichnungen der Abb. 3 und 3a durch die mit fortlaufendem Index versehenen Größen u ersetzt (vgl. Spaltenmatrix in Abb. 4):

$$\begin{array}{llll} u_1 = \alpha_1 & u_4 = x_1 & u_7 = M_1 & u_{10} = S_1 \\ u_2 = \alpha_2 & u_5 = x_2 & u_8 = M_2 & u_{11} = S_2 \\ u_3 = \alpha_3 & u_6 = x_3 & u_9 = M_3 & u_{12} = S_3 \end{array}$$

4. Aufstellung der Frequenzdeterminante

In gleicher Weise kann man sich die Spaltenmatrix u_r durch das Matrizenprodukt

$$\mathfrak{U}_{r-1} \cdot u_{r-1} = u_r$$

entstanden denken. Die Spaltenmatrix u_n für den Stabzug der Abb. 1 würde sich also bei vorgegebener Spaltenmatrix u_1 wie folgt ergeben

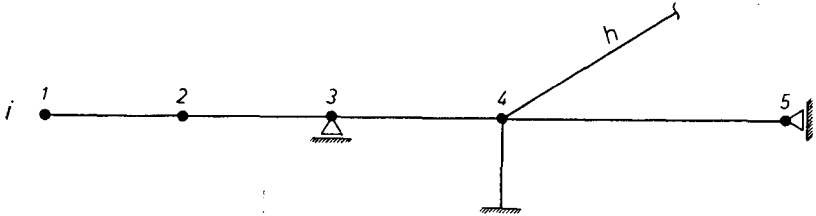
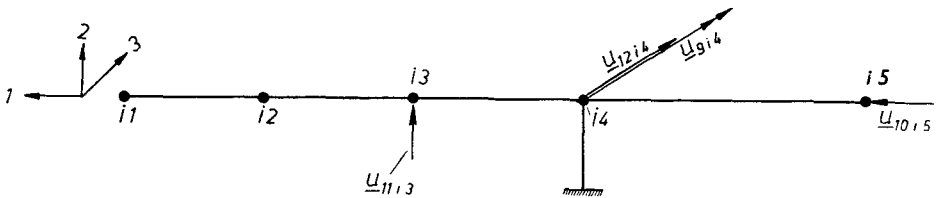
$$\mathfrak{U}_{n-1} \cdot \mathfrak{U}_{n-2} \cdot \dots \cdot \mathfrak{U}_2 \cdot \mathfrak{U}_1 \cdot u_1 = \mathfrak{B} \cdot u_1 = u_n$$

Entsprechend den Ausführungen unter 2. sind infolge der Randbedingungen am linken Ende des Stabzuges die sechs Elemente der vorgegebenen Spaltenmatrix $u_{7,1}$ bis $u_{12,1}$ durch die Elemente $u_{1,1}$ bis $u_{6,1}$ auszudrücken. Im Hinblick auf die Randbedingungen am rechten Ende des Stabzuges enthält nun das Matrizenprodukt $\mathfrak{B} \cdot u_1 = u_n$ sechs lineare homogene Gleichungen für die Größen $u_{1,1}$ bis $u_{6,1}$. Die Erfüllung bzw. Nichterfüllung der Forderung nach dem Verschwinden der Nennerdeterminante dieses homogenen Gleichungssystems entscheidet darüber, ob die eingesetzte Frequenz eine Eigenfrequenz des Stabzuges ist bzw. nicht ist.

Bei verzweigten und vermaschten Stabwerken, z. B. bei räumlichen Rahmentragwerken, sind die Verhältnisse nicht so einfach wie bei dem Stabzug der Abb. 1. Bei solchen Stabwerken erweist es sich als notwendig, das Stabwerk in einzelne freie bzw. federgefesselte*) Stabzüge zu zerschneiden. Die

*) Auf der Abb. 1 sind die Punkte 2 und $n-1$ federgefesselt. Auf einen Schnitt durch die Federfesselung kann verzichtet werden, solange die Masse der Feder vernachlässigbar ist oder ihre Masse mit hinreichender Genauigkeit auf den durch sie gefesselten Massenpunkt reduziert werden kann.

Schnittgrößen, welche die Wirkung der abgeschnittenen auf den jeweils betrachteten Stabzug wiedergeben, werden als Unbekannte eingeführt. Die Forderung nach dem kinematischen Zusammenhalt des Stabwerkes und die Beachtung des Axioms „*actio = reactio*“ liefern die zusätzlichen Gleichungen für die Bestimmung dieser Unbekannten. Die formale Einführung der unbekannten Schnittgrößen in die Matrizenrechnung möge am folgenden schematischen Beispiel (vgl. Abb. 5 und 5a) erläutert werden.

Abb. 5. Stabzug i mit Anschlußstab h Abb. 5a. Isolierter Stabzug i

Der Stabzug der Abb. 5 stelle den i ten Stabzug eines räumlichen Stabwerkes dar, der mit dem übrigen Stabwerk durch den Stab h verbunden sei. Der Stab h möge lediglich eine Längskraft und ein Torsionsmoment übertragen können. Der Stabzug i besitzt an der Stelle 3 ein horizontal verschiebliches Lager und ist an der Stelle 4 im Sinne der Fußnote auf Seite 234 federgefestelt. Das Auflager an der Stelle 5 soll nur axiale Kräfte übertragen können. Für die Durchführung der Rechnung untersuchen wir das Ersatzsystem entsprechend Abb. 5a. Hier ist an Stelle des Auflagers am Punkt 3 als Unbekannte die Auflagerreaktion $u_{11,i3}$ eingeführt. Darin weist der Index 11 auf die Spaltennummer der quadratischen Matrix (vgl. Abb. 4) hin, mit deren Elementen die betreffende Unbekannte zu multiplizieren ist, um ihre Wirkung auf den folgenden Punkt i_4 zu übertragen. Die übrigen zwei Indizes bezeichnen den Angriffsort der Unbekannten. Die Wirkung des Stabes h auf den Stabzug i ersetzen wir durch die zwei Unbekannten $u_{9,i4}$ und $u_{12,i4}$, also durch ein Biegemoment und durch eine Querkraft. Die Federfesselung am Punkte i_4 beseitigen wir nicht durch einen Schnitt, da bei gegebenen elastischen Eigenschaften des fest eingespannten Anschlußstabes seine Reaktionen auf den Punkt i_4 proportional den sich bei der Rechnung ergebenden Auslenkungen dieses Punktes sind.

Die eigentliche Rechnung vollzieht sich nun in dem aus der Abb. 6 ersichtlichen Matrizenschema. Die gestrichelt umrandeten quadratischen Matrizen

$\mathfrak{A}_1; \mathfrak{A}_2$ usw. enthalten die Daten der einzelnen Abschnitte des Stabzuges i , während die ausgezogen umrandeten quadratischen Matrizen die Produkte der gegebenen Matrizen darstellen. Dabei ist die Anordnung so getroffen, daß die bei der skalaren Matrizenmultiplikation gewonnenen Elemente der Produktmatrix jeweils im Schnittpunkt der betreffenden Zeile und Spalte stehen. So wird nacheinander aus \mathfrak{A}_2 und \mathfrak{A}_1 das Matrizenprodukt $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1$ danach aus \mathfrak{A}_3 und dem Produkt $\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1$ das Matrizenprodukt $\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1$ gewonnen usw.

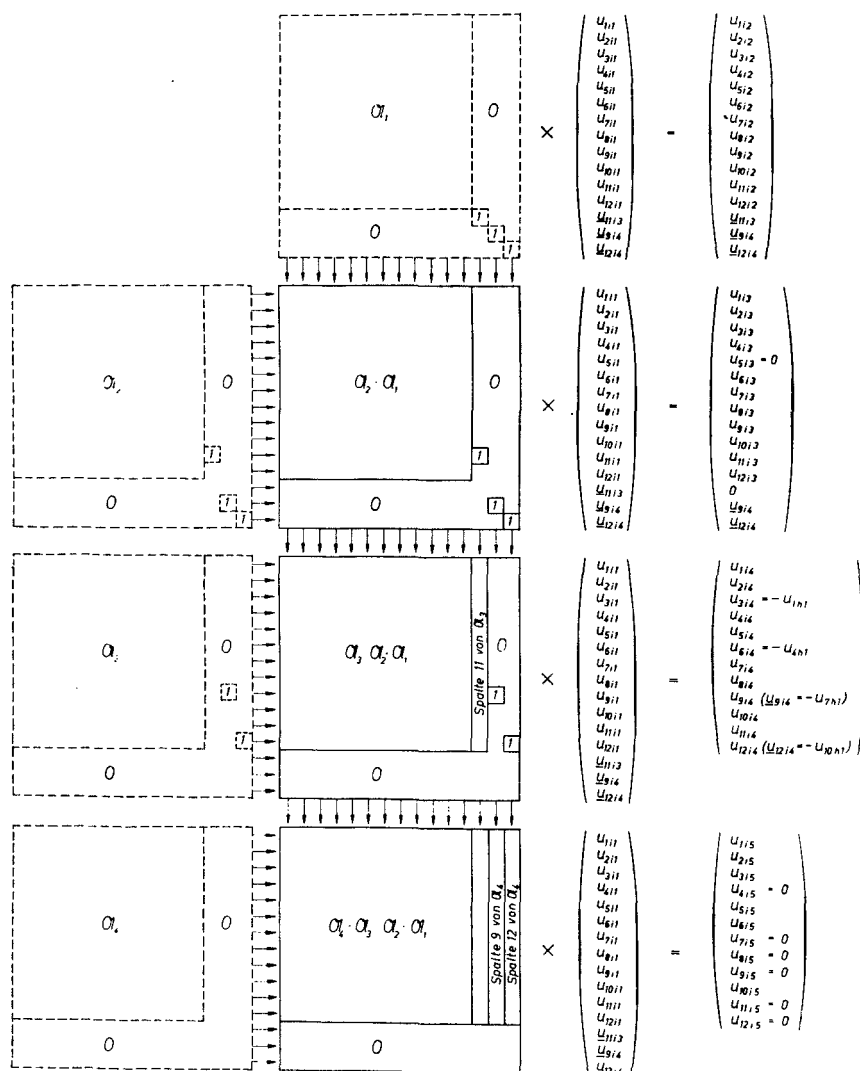


Abb. 6. Matrizenschema

Die Elemente der jeweils links vom Gleichheitszeichen stehenden Spaltenmatrix u_{i1} sind die unmittelbar rechts*) vom Punkt $i1$ der Abb. 5a eingeführten sechs Auslenkungs- und sechs Schnittgrößen; dazu treten die drei bei $i3$ und $i4$ eingeleiteten Unbekannten u_{11i3} , u_{9i4} und u_{12i4} . Im Gegensatz zum Matrizen-schema der Abb. 6 wird man beim praktischen Rechnen diese Spaltenmatrix nur einmal, und zwar zu Anfang der Berechnung jedes Stabzuges hinschreiben. Die den Unbekannten u_{11i3} , u_{9i4} und u_{12i4} entsprechenden Zahlen „eins“ in der Diagonale der gestrichelt umrandeten Matrizen sind notwendig, damit bei der Bildung der Produkte $\mathcal{Q}_1 u_{i1}$; $\mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_1 u_{i1}$ usw. diese Unbekannten nicht „verloren“ gehen.

In der Übertragungsmatrix für einen Abschnitt vor der Stelle, an der eine dieser Unbekannten angreift, wird die entsprechende „eins“ aus der Diagonalen in die Zeile gehoben, deren Nummer gleich dem ersten Index der betrachteten Unbekannten ist**). Damit wird erreicht, daß die entsprechende Schnittgröße, z. B. u_{11i3} (Querkraft rechts von $i3$), die bei der Bildung des Matrizenproduktes $\mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_1 u_{i1}$ mitgefunden wird, auch die bei $i3$ angreifende unbekannte Kraft u_{11i3} enthält.

Neben die Elemente der bei der Rechnung sich ergebenden Spaltenmatrizen der rechten Seite vom Gleichheitszeichen werden schon vor Beginn der zahlenmäßigen Ausrechnung der Matrizenprodukte die Auflager-, Rand- und Übergangsbedingungen geschrieben. Sobald ein Matrizen-schema entsprechend Abb. 6 für jeden Stabzug des Stabwerkes angefertigt ist, kann die Nennerdeterminante des aus den Auflager-, Rand- und Übergangsbedingungen jedes Stabzuges folgenden homogenen Gleichungssystems aufgestellt werden. Somit ist es möglich, unter Verwendung derartiger Matrizen-schemata die gesamte Rechnung einheitlich zu programmieren.

5. Möglichkeit der Verstimmung des Stabwerkes

Das beschriebene Verfahren ist auch geeignet, den Wunsch des Praktikers zu befriedigen, eine gegebenenfalls notwendig werdende Verstimmung des Tragwerkes ohne Probieren vornehmen zu können. Im allgemeinen obliegt dem Schwingungsrechner die Aufgabe, eine gegebene Konstruktion auf ihr Schwingungsverhalten zu untersuchen. Ist das Ergebnis nicht zufriedenstellend, so muß er Vorschläge zur Änderung der Steifigkeitsverhältnisse und (oder) der Massenbelegung machen, wobei er sich im wesentlichen von seiner Erfahrung leiten läßt. Die Möglichkeiten, die ihm dabei zur Verfügung stehen,

*) Bei der Durchführung der Zahlenrechnung ergibt sich eine erhebliche Verringerung des Rechenaufwandes, wenn man im vorliegenden Falle die unmittelbar links von $i1$ vorhandenen 6 Auslenkungs- und 6 Schnittgrößen einführt, d. h. mit der Spaltenmatrix u_{i0} beginnt. Da hier die den Schnittgrößen entsprechenden 6 Elemente gleich Null sind, brauchen dann bei der Produktbildung der quadratischen Matrizen die diesen Elementen entsprechenden Spalten nicht ausgerechnet zu werden. Man erhält die Spaltenmatrix u_{i1} der Abb. 6 durch Multiplikation der Spaltenmatrix u_{i0} mit einer sehr einfach gebauten quadratischen Matrix \mathcal{Q}_0 , deren Elemente bei dem betrachteten Beispiel allein durch die Massenbelegung der Stelle $i1$ festgelegt sind.

** Wir können also diesen Rechenbefehl „automatisch“ den Indizes der Unbekannten entnehmen.

sind meistens durch konstruktive Gegebenheiten und wirtschaftliche Erfordernisse begrenzt.

Hier kann das beschriebene Verfahren herangezogen werden, um die Wirkung der zu treffenden Maßnahmen quantitativ zu beurteilen. Ein Beispiel möge dies verdeutlichen. An einer Stelle des Stabzuges sei es möglich, in gewissen Grenzen die Massenbelegung beliebig zu wählen. Der Einfachheit halber sei lediglich die Schwingung in nur einer Richtung von Bedeutung. Wir führen nun an Stelle der Masse in unser Ersatzsystem eine unbekannte Kraft in Richtung der betrachteten Auslenkung ein, die genau so wie z. B. die unbekannte Reaktion $u_{11,3}$ in Abb. 5a durch das Matrizenschema (Abb. 6) geschleust wird. Als weitere Gleichung tritt dann in dem homogenen Gleichungssystem die Beziehung hinzu, daß die eingeführte unbekannte Kraft gleich dem Produkt aus Masse m mal Auslenkung an der Angriffsstelle mal dem Quadrat der eingesetzten Frequenz ω ist. Diese Beziehung ist ebenfalls homogen in den Elementen der zu Beginn der Rechnung aufgestellten Spaltenmatrix. Damit ist die Masse m ein Parameter der Nennerdeterminante unseres homogenen Gleichungssystems geworden, der in gewissem Maße die Verlegung von Eigenfrequenzen außerhalb des interessierenden Betriebsbereiches gestattet. In gleicher Weise können z. B. die Möglichkeiten der Abänderung der elastischen Eigenschaften von Stützen usw. beurteilt werden. Natürlich steht der gleichzeitigen Einführung mehrerer Parameter nichts entgegen. Es liegt auf der Hand, daß unser Verfahren auch zur Untersuchung der Verformungsmöglichkeiten bestehender, im Betriebsbereich unruhiger Konstruktionen nutzbringend angewandt werden kann.

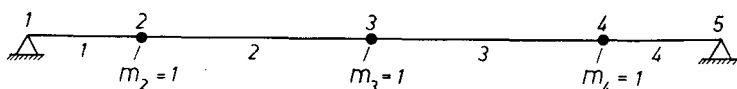


Abb. 7. Balken mit Einzelmassen

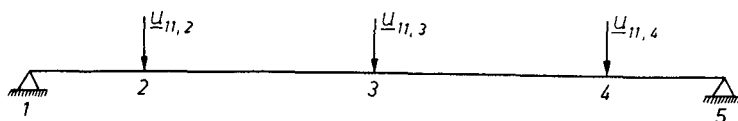


Abb. 7a. Balken mit 3 Trägheitskräften

6. Variante des Verfahrens

Die im folgenden an einem Beispiel erörterte Variante des Verfahrens erfordert zuweilen einen geringeren Rechenaufwand als die zuvor beschriebene Durchführung des Verfahrens, insbesondere dann, wenn das ganze Frequenzspektrum einer Stabwerkskonstruktion untersucht werden soll. Wir betrachten eine zweifach gelagerte Welle, die mit drei Einzelmassen besetzt sei (Abb. 7). In Abänderung des im Abschnitt 4 beschriebenen Verfahrens führen wir nun die Trägheitskräfte der Massen als Unbekannte in Richtung der Biegeschwingungsauslenkung ein, die hier allein untersucht werden soll. Wir

berechnen also im folgenden ein Stabwerk, das entsprechend der Abb. 7a beansprucht wird.

Da wir lediglich Biegeschwingungen untersuchen, ist die Übertragungsmatrix nur vierzeilig. Sie enthält also nur die Zeilen und Spalten 3, 5, 9 und 11 der Matrix in Abb. 4. Die eingangs der Rechnung aufzustellende Spaltenmatrix besteht außer den vier Elementen u_{31} , u_{51} , u_{91} und u_{111} noch aus den drei unbekannten Trägheitskräften u_{112} , u_{113} , u_{114} , die nun entsprechend den Unbekannten im Matrizenschema der Abb. 6 durchgeschleust werden. Die quadratischen Übertragungsmatrizen vereinfachen sich gegenüber den der Tabelle I dadurch, daß alle mit ω^2 multiplizierten Elemente verschwinden. In dem Matrizenschema*) der Abb. 8 ist ein Zahlenbeispiel durchgerechnet, dem

The diagram illustrates the iterative calculation of a transfer matrix for a beam structure. It consists of four rows, each representing a step in the calculation. Each row shows a sparse matrix (dashed box) being multiplied by a column vector (middle box) to produce a new column vector (solid box). The matrices are 4x4, and the vectors are 4x1. The calculations involve numerical values and symbolic terms like ω^2 .

Row 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{31} \\ u_{51} = 0 \\ u_{91} = 0 \\ u_{111} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{32} \\ u_{52} = \frac{u_{112}}{\omega^2} \\ u_{92} \\ u_{112} \end{pmatrix}$$

Row 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -12 & -12 \\ -2 & 1 & 12 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{31} \\ u_{51} = 0 \\ u_{91} = 0 \\ u_{111} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{33} \\ u_{53} = \frac{u_{112}}{\omega^2} \\ u_{93} \\ u_{112} \end{pmatrix}$$

Row 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -30 & -75 & -48 & -12 \\ -5 & 1 & 75 & 125 & 64 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{31} \\ u_{51} = 0 \\ u_{91} = 0 \\ u_{111} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{34} \\ u_{54} = \frac{u_{112}}{\omega^2} \\ u_{94} \\ u_{112} \end{pmatrix}$$

Row 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -36 & -108 & -75 & -27 & -3 \\ -6 & 1 & 108 & 216 & 125 & 27 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{31} \\ u_{51} = 0 \\ u_{91} = 0 \\ u_{111} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{35} \\ u_{55} = 0 \\ u_{95} = 0 \\ u_{115} \end{pmatrix}$$

Abb. 8. Zahlenbeispiel

*) Im vorliegenden Beispiel ist im Hinblick auf die Randbedingungen am linken Auflager ($u_{51} = 0$; $u_{91} = 0$) die Ausrechnung der 2. und 3. Spalte der Produktmatrizen an sich nicht notwendig.

das Ersatzsystem in Abb. 7a zugrunde liegt. In der Tabelle I sind die Daten dieses Systems zusammengestellt.

Tabelle I.

	Abschnitte 1 und 4	Abschnitte 2 und 3
l	1	2
v_{M3}	6	12
v_{S2}	3	12
d_{M3}	3	12
d_{S2}	2	16

Die fünf Gleichungen, die in den fünf von Null verschiedenen Elementen der Spaltenmatrix homogen sind, und deren Nennerdeterminante zur Bestimmung der Eigenfrequenzen zum Verschwinden gebracht werden muß, sind den Spaltenmatrizen der rechten Seite unseres Matrizenschemas zu ent-

u_{j1}	u_{n1}	u_{n2}	u_{n3}	u_{n4}
-6	216	125	27	1
0	6	5	3	1
-5	125	64	8	$-\lambda$
-3	27	8	$-\lambda$	0
-1	1	$-\lambda$	0	0
15	-375	$-202 + \lambda$	$-38 + \lambda$	$-2 + \lambda$
-6	36	20,83333	4,5	0,16667
0	6	-0,83333	-0,5	-0,16667
-5	-55	5,66667	-2,29412	$0,17647 \lambda - 1,47059$
-3	-81	13	$-2,82356 - \lambda$	$\frac{-6,11766 + 2,29412 \lambda}{2,82356 + \lambda}$
-1	-35	$8,33333 - \lambda$	$-6,11766 + 2,29412 \lambda$	$\frac{-0,17647 \lambda^2 + 7,70590 \lambda^2 - 26,35294 \lambda + 18,82347}{2,82356 + \lambda}$
15	165	$-27 + \lambda$	$8,94124 - 1,29412 \lambda$	$\frac{+0,17647 \lambda^2 - 7,70588 \lambda^2 + 26,35306 \lambda - 18,82351}{2,82356 + \lambda}$
0	0	0	$0,00002 + 0 \cdot \lambda$	

Abb. 9. Ausrechnung der Frequenzdeterminante

nehmen. Somit finden wir als Frequenzdeterminante, wenn $\frac{1}{m \omega^2}$ durch λ ersetzt wird, die obere Hälfte der Abb. 9. Die Ausrechnung dieser Determinante erfolgt in der unteren Hälfte dieser Abbildung nach dem bekannten Verfahren von Gauß-Banachiewicz. Als Lösung finden wir

$$\lambda_1 = 40; \lambda_2 = 2,667; \lambda_3 = 1.$$

In der Abb. 9 ist auch die Rechenkontrolle in Form der sogenannten Summenprobe eingetragen. Die Abhängigkeit des Determinantenwertes von λ ist aus der Abb. 10 zu ersehen.

7. Berechnung erzwungener Schwingungen

Auch die Berechnung erzwungener Schwingungen fügt sich zwanglos in die in den Abschnitten 4 und 6 beschriebenen Schemata ein. Die die Schwingung erregende Größe wird ebenso wie die Unbekannten in der zu Beginn der Rechnung aufzustellenden Spaltenmatrix eingeführt und entsprechend mit Hilfe der Übertragungsmatrizen durch die Rechnung geschleust. Wir erhalten dann für die Befriedigung der Auflager-, Übergangs- und Randbedingungen ein inhomogenes Gleichungssystem, das uns bei nichtverschwindender Nennerdeterminante Auslenkungsform und Beanspruchung des Stabwerkes liefert. Die bei der Berechnung zugrunde gelegte Frequenz ist natürlich die der Erregung.

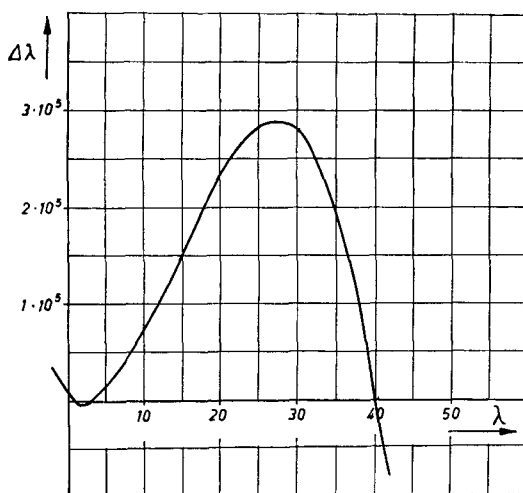


Abb. 10. Frequenzdeterminante als Funktion von ω

Das Verfahren entsprechend Abschnitt 6 dürfte nur dann zweckmäßig sein, wenn die erzwungenen Schwingungen für eine größere Anzahl von Erregerfrequenzen zu berechnen sind. Bei mehreren Erregerkräften finden wir die resultierende erzwungene Schwingung als Überlagerung der einzelnen erzwungenen Schwingungen unter Berücksichtigung der Frequenz und Phasenlage jeder erregenden Größe.

8. Zusammenfassung

Das bekannte Holzer-Verfahren für die Berechnung von Torsionsschwingungen von Stäben mit diskreter Massenbelegung wurde zu einem Verfahren für die Untersuchung des allgemeinen stationären Schwingungsverhaltens von Stabwerken erweitert. Für die Berechnung der freien und erzwungenen Schwingungen wurden zwei Verfahren beschrieben, die eine weitgehende Schematisierung und Kontrolle der Zahlenrechnung gestatten. Die Rechengenauigkeit läßt sich beliebig hoch steigern. In jedem Falle ist es zweck-

mäßig, bei der Multiplikation der Übergangsmatrizen und der Berechnung der Determinante mit mindestens zwei bis drei Schutzstellen zu rechnen. Die Anzahl der Schutzstellen richtet sich nach der Anzahl der nacheinander zu multiplizierenden Übertragungsmatrizen; doch dürften auch bei sehr großem Rechenumfang (z. B. bei Dampfturbinenfundamenten) die Verwendung von achtstelligen Matrizenelementen allen praktischen Ansprüchen an Rechengenauigkeit genügen. Bei der Produktbildung der Matrizen sollte immer die Spaltenspalte mitgeführt werden, um Rechenfehler zu vermeiden, die ja bei ihrem Auftreten die ganze folgende Rechnung entwerten würden.

Literatur

- [1] H. Schaefer, Reduktion eines linearen Eigenwertproblems 2. Ordnung mit Hilfe einer bekannten Eigenfunktion. — Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Band V, 1953.
- [2] S. Falk, Dissertation (Braunschweig 1953, Ref. Prof. H. Schaefer).
- [3] N. O. Myklestad, A New Method of Calculating Natural Modes of Uncoupled Bending Vibration of Airplane Wings and Other Types of Beams. — *Journal of the Aeronautical Sciences*, April 1944.
- [4] W. T. Thomson, Matrix Solution for the Vibration of Nonuniform Beams. — *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 17, 1950.
- [5] H. Fuhrke, Dissertation (Darmstadt 1953, Ref. Prof. K. Marguerre).